La toile d’araignée...

... qui n’a rien à voir avec le Web

Il est parfois important, sinon vital, de communiquer une information à l’ensemble d’une population dans les délais les plus brefs. Quand celle-ci est géographiquement dispersée, ce peut être un véritable casse-tête. Voici une réflexion sur ce thème.

On m’a posé, il y a quelques années, la question suivante : en supposant que tout le monde ait le téléphone, comment s’organiser pour qu’une information connue par une seule personne soit communiquée à N autres personnes dans un temps minimum ?

J’ai donc planché là-dessus, en commençant par reformuler le problème sous la forme suivante :

Une information est connue par l’individu n°1 ; si chaque personne appelle N autres personnes, quels sont les numéros à appeler par l’individu X pour que :

- a) l’information soit transmise le plus rapidement possible
- b) tout le monde soit appelé une fois et une seule.

Toile n°1

Si on pose P=2, il existe une solution simple : la personne ayant le n°X appelle les correspondants de numéro 2X et 2X+1. Ainsi le n°1 appelle les n^{os} 2 et 3, le n°2 appelle les n^{os} 4 et 5, le n°37 appelle les n^{os} 74 et 75, etc.
En supposant qu’un appel téléphonique prenne 1 minute, on informe 3 personnes en 2 minutes, 7 personnes en 4 minutes, 15 personnes en 6 minutes,... 1 023 personnes en 18 minutes,... 1 048 575 personnes en 38 minutes, etc. (l’informateur initial inclus).
J’ai bien sûr cherché à faire varier P pour diminuer ce délai. Un petit calcul mathématique m’a indiqué que la propagation la plus rapide était obtenue pour P=2,71828... Comme il est difficile en l’état actuel de la technologie de passer un nombre d’appels téléphoniques non entier, il s’avère que la meilleure performance est obtenue pour P=3, avec un gain cependant minime par rapport à P=2 (36 minutes au lieu de 38).

Toile n°2

Il est cependant possible de faire beaucoup mieux. En effet, dans la configuration P=2 définie ci-dessus, avec 31 personnes, le n°2 est averti en 1 minute, le n°4 en 2 minutes, le n°8 en 3 minutes, et le n°16 en 4 minutes ; alors qu’il faut 2 minutes pour avertir le n°3, 4 minutes pour le n°7, 6 minutes pour le n°15 et 8 minutes pour le n°31 ! Bref, le n°16 qui n’a personne à appeler est averti 2 minutes avant le n°15 qui, lui, doit encore avertir les n^{os} 30 et 31.
Nous pouvons déterminer un délai au-dessous duquel il sera impossible (si, si, c’est français : c’est dans le Petit Larousse !), impossible, disais-je, de descendre : c’est quand toutes les personnes déjà averties continuent d’appeler ; le n°2 est averti en 1 minute, les n^{os} 3 et 4 en 2 minutes, les n^{os} 5 à 8 en 3 minutes, etc. Il suffit alors de 10 minutes pour avertir 1 024 personnes, et 1 048 576 personnes sont informées en 20 minutes - à comparer avec les 38 minutes du premier cas !

Toile n°3

Le défaut de ce second système, c'est que les premiers avertis téléphonent beaucoup plus que les derniers : pour 1 million de personnes, le n°12 fait 20 appels, le n°2 : 19, le n°1 024 : 10, etc. Il faut donc trouver quelque chose de plus égalitaire, en limitant le nombre d'appels à donner par une même personne, tout en se rapprochant du cas limite défini au § précédent.

La solution est simple, et la voici. En reprenant la première solution, on voit immédiatement qu'on gagnerait à attribuer les n^{os} 30 et 31 au n°16 plutôt qu'au n°15. Pour optimiser ceci, avec P=2, il suffit de répartir les appels non plus selon les puissances de 2, mais en utilisant la suite dite "de Fibonacci", qui est : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc. et dont chaque terme n'est autre que la somme des deux termes qui le précèdent.

On utilisera cette suite en supprimant le premier terme. La règle d'appel est alors la suivante : l'individu qui a le n°X se situe dans cette suite comme supérieur ou égal à un terme et strictement inférieur au suivant. Soient A et B ces deux termes (donc $A \leq X < B$) : le n°X doit donc appeler les n^{os} X+A et X+B.

Exemple : le n°16, compris entre les termes 13 et 21, appellera les n^{os} 29 et 37 ; le n°21, compris entre 21 et 34, appellera les n^{os} 42 et 55. Avec cette méthode, avertir un million de personnes ne prend plus que 28 minutes (contre 38 précédemment).

Toile n°4

On peut, bien sûr, augmenter la valeur de P, le cas limite de 2^N personnes averties en N minutes étant atteint quand P=N. Mais le gain relatif se réduit beaucoup au-delà de P=3 : pour cette dernière valeur, le temps nécessaire pour avertir un million de personnes est de 23 minutes, très près du minimum absolu de 20 minutes ; et passer de P=3 à P=20 ne fait plus gagner que 3 minutes.

Voici le début de la table d'appels pour P=3 :

Appelant	Appelés		
1	2	3	5
	↙	↙	↙
2	4	6	9
	↙	↙	↙
3	7	10	16
	↙	↙	↙
4	8	11	17
	↙	↙	↙
5	12	18	29
...	...	...	...
8	15	21	32
	↙	↙	↙
9	22	33	
...	...	...	
15	28	39	
	↙	↙	
16	40		
...	...		
28	52		
etc.			

La règle de construction est ici rendue (presque) évidente avec les flèches. Cette méthode est applicable quel que soit P. ▲

Jean-Luc Blary